A. Signe de la dérivée et variations

Propriétés :
f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- $f'(x) \geqslant 0$ sur I si et seulement si f est ____________ sur I.
- $f'(x) \leqslant 0$ sur I si et seulement si f est _______________ sur I.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x - 12$$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$							

B. Extremum local d'une fonction

Propriété :
Si la fonction dérivée f' s'annule et change de signe, la fonction f atteint un ___________________ .

Vocabulaire : On parle d' ____________ local pour désigner un minimum ou un maximum local.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x - 12$ admet :

Exemple : Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$.
Montrer que $f'(x) = 6(x-1)(x+2)$. En déduire les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

On détermine le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	

On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

Exercice 1 ★

Corrigé :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,8]$ par :

$$f(x) = x^3 - 10,5x^2 + 30x - 20$$

a) Compléter dans ce tableau les variations de f.

b) Reporter les valeurs de $f(0)$; $f(2)$; $f(5)$ et $f(8)$.

x	0		2		5		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

Exercice 2 ★

Corrigé :

Compléter le signe de $f'(x)$ dans le tableau ci-contre :

x	-3		-1		4		10
$f'(x)$							
$f(x)$	5	↘	-3	↗	8	↘	1

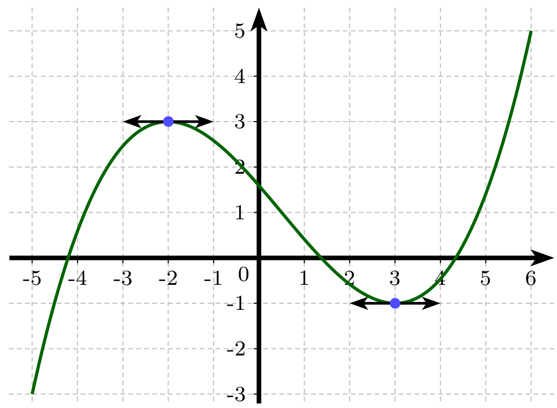
Exercice 3 ★

Corrigé :

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5\,;\,6]$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

En déduire le tableau de signes de $f'(x)$.

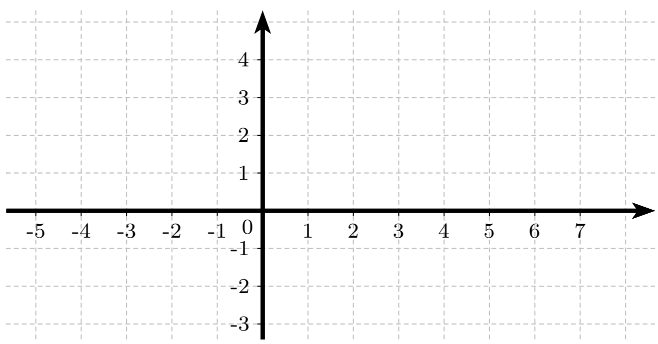


Exercice 4 ★★

On donne ci-contre le tableau concernant une fonction f :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	4	↘	-3	↗	

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
   Quel est celui de f' ?
2. f possède-t-elle des extremums locaux ?
3. Donner l'allure d'une courbe susceptible de représenter f.



Exercice 5 ★★

f est une fonction définie et dérivable sur $[-10\,;\,10]$.
f est croissante sur les intervalles $[-10\,;\,2]$ et $[3\,;\,10]$ et décroissante sur $[2\,;\,3]$.

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Dans un repère, tracer une allure possible de la courbe représentative de f.

Exercice 6 ★

Corrigé :

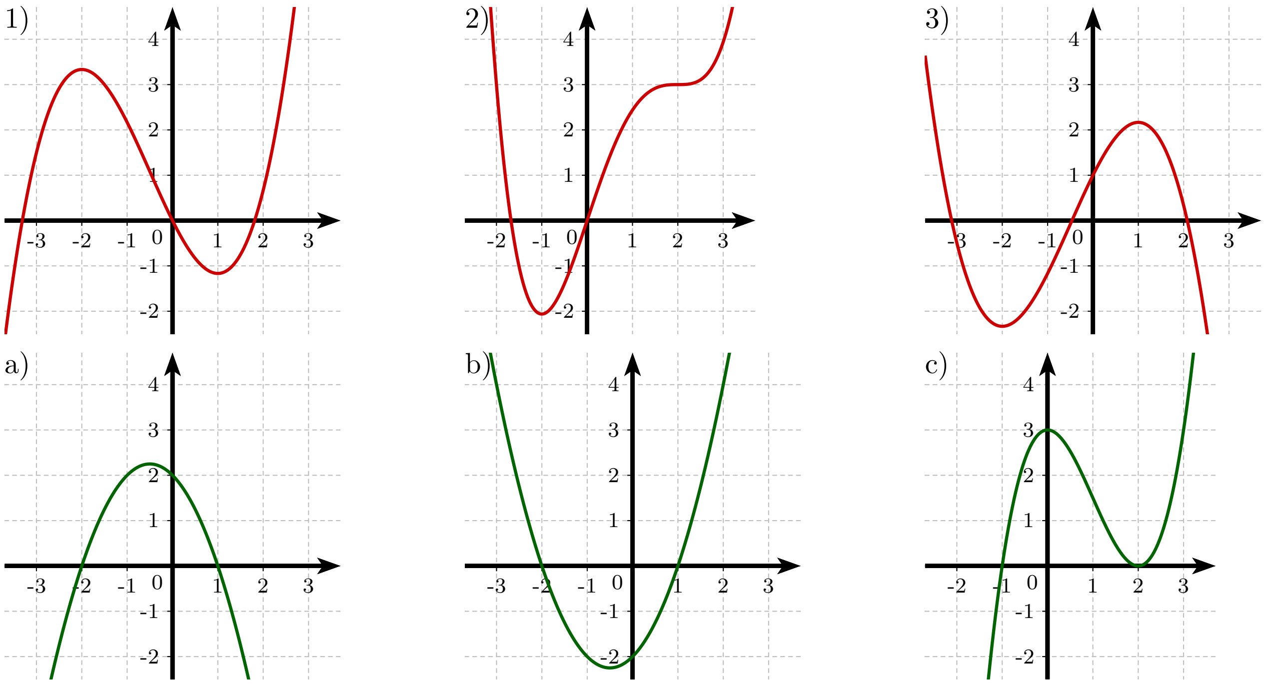
Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire les variations de f.

Exercice 7 ★★

Les courbes suivantes représentent trois fonctions 1), 2), 3) et leurs fonctions dérivées a), b), c) dans un ordre arbitraire.

Observer attentivement ces courbes et associer à chaque fonction sa fonction dérivée.



Exercice 8 ★★

Corrigé :

Soit f la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 7$.

1. Montrer $f'(x) = -3(x+1)(x-3)$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 ★★

Soit g la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1. Montrer $g'(x) = 3x(x-2)$.
2. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 ★★

Soit h la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 8x - 5$.

1. Montrer $h'(x) = 2x^2 + 8$.
2. Justifier que $h'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 ★★

Soit i la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - 12x^2 + 20x - 1$.

1. Montrer $i'(x) = 4(x-1)(x-5)$.
2. Déterminer le signe de $i'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de i sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 ★★

Dans le département de Charente-Maritime, lors d'une épidémie de grippe, le nombre de personnes malades n jours après l'apparition des premiers cas est estimée à :

$$30n^2 - n^3 \qquad (n \text{ est un entier tel que } 0 \leqslant n \leqslant 30.)$$

Soit f fonction définie sur $[0\,;\,30]$ par : $\quad f(x) = 30x^2 - x^3$.

1. a) Montrer que $f'(x) = 3x(20 - x)$. En déduire le signe de $f'(x)$.
   b) Déterminer les variations de f.
2. a) En déduire de la question précédente le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 30 jours.
   b) Préciser le nombre de personnes malades ce jour-là.

Exercice 13 ★★

Corrigé :

Dans une entreprise familiale, le coût unitaire C, en euros, pour x centaines de pièces produites, est donné par :

$$C(x) = 0,01x^3 - 0,09x^2 - 0,48x + 5 \quad \text{pour } x \text{ compris entre 0 et 10.}$$

1. Montrer que $C'(x) = 0,03(x + 2)(x - 8)$. En déduire le signe de $C'(x)$.
2. Déterminer les variations de la fonction C.
3. Quel est le nombre de pièces que l'entreprise doit produire pour obtenir un coût unitaire minimal ? Préciser ce coût minimal.

Exercice 14 ★★

Une entreprise produit des microprocesseurs. La fonction B définie sur $[0\,;\,20]$ par :

$$B(x) = -0,5x^3 + 6x^2 + 192x - 100$$

désigne le bénéfice, en centaines d'euros, obtenu en vendant x centaines de pièces.

1. Montrer que $B'(x) = -1,5(x - 16)(x + 8)$. En déduire le signe de $B'(x)$.
2. Déterminer les variations de la fonction B.
3. Quelle quantité de microprocesseurs doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Que vaut alors ce bénéfice maximal ?

Exercice 15 ★★★

Une entreprise fabrique et vend un produit imperméabilisant pour vêtements et équipements de randonnée.
La quantité hebdomadaire produite x (en litres) varie entre 0 et 600.
Le coût de fabrication, en euros, de x litres est donné par :

$$C(x) = 0,001x^3 - 0,05x^2 + 40x + 5\,000$$

La recette, en euros, est donnée par $R(x) = -0,2x^2 + 640x$.

1. On appelle $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x litres de produit. Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
2. Montrer que $B'(x) = -0,003(x - 400)(x + 500)$. En déduire le signe de $B'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction B.
4. Quelle quantité doit fabriquer l'entreprise pour que son bénéfice soit maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?